La science française / Exposition universelle et internationale de San Francisco ; [préface par Lucien Poincaré]

LES MATHÉMATIQUES

Quoique lé progrès des mathématiques les conduise peu à peu vers une unité des plus remarquables et que toutes leurs parties se pénètrent mutuellement, nous diviserons ce rapide exposé en six parties : ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE, ANALYSE MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE, CINÉMATIQUE et MÉCANIQUE.

Dans l'impossibilité de faire aussi brièvement un exposé complet, nous insisterons davantage sur les mathématiciens français *des temps présents*.

✿ ✿ ✿

ARITHMÉTIQUE. — En tête de l'arithmétique moderne doit s'inscrire en premier lieu le nom d'un génial français, FERMAT. Après lui, la théorie des nombres, longtemps délaissée, fut ranimée par les travaux de deux Français : LAGRANGE et LEGENDRE.

CAUCHY démontra un des théorèmes énoncés par Fermat et laissa une empreinte féconde dans le domaine de l'arithmétique.

HERMITE a réalisé un grand progrès en introduisant les variables continues et les indéterminées conjuguées dans la théorie des nombres. Il a déduit d'importantes propriétés des nombres des identités de la théorie des fonctions elliptiques : il a immortalisé son nom par sa démonstration de la transcendance du nombre e. Ces recherches ont été continuées par M. JORDAN, par POINCARÉ, par M. E. PICARD, puis par M. HUMBERT dans le domaine des fonctions *théta* de deux variables, et plus récemment par MM. CHATELET et COTTY; citons également M. GOT. D'autre part, un Français, M. HADAMARD et un Belge, M. DE LA VALLÉE-POUSSIN, ont apporté des contributions importantes à la théorie des nombres premiers par la voie de l'analyse mathématique.

❂ ❂ ❂

ALGÈBRE. — En algèbre moderne il faut de nouveau citer, en premier lieu, Lagrange pour ses recherches sur la résolution des équations. Après lui, Cauchy créa la théorie des déterminants et des clefs algébriques, et entrevit l'importance de la théorie des groupes de substitutions. Mais il était réservé à un Français, GALOIS, de caractériser chaque équation algébrique par son groupe, de définir les sous-groupes invariants, de classer les groupes en simples et composés..., etc. Conceptions géniales qui, non seulement renouvelèrent l'algèbre, mais ouvrirent la voie aux recherches récentes sur la théorie des groupes qui devient de plus en plus importante.

Hermite, Joseph BERTRAND, puis M. Jordan, dans son traité des substitutions, approfondirent les idées de Galois.

Hermite résolut l'équation du 5e degré en employant la fonction modulaire : STURM découvrit un théorème célèbre sur le nombre des racines réelles d'une équation algébrique comprise entre deux nombres donnés. D'intéressants théorèmes sur les racines réelles des équations algébriques ont été donnés par LAGUERRE. Un *Traité d'Algèbre supérieure* a été publié par SERRET.

Dans le domaine des invariants et des covariants des formes algébriques, les premières découvertes ont été faites par le Français Hermite avec les Anglais Cayley et Sylvester. M. ANDOYER a publié un ouvrage sur cette théorie. Poincaré a introduit la notion des invariants arithmétiques.

❂ ❂ ❂

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Sans remonter à l'invention du calcul infinitésimal, due à l'Anglais Newton et à l'Allemand Leibnitz, nous trouvons encore au commencement de l'époque moderne les beaux travaux de Lagrange.

Deux théories d'une importance fondamentale dominent l'analyse mathématique de notre époque : d'une part la définition et l'étude des fonctions de variables complexes et de leurs intégrales, d'autre part la représentation des fonctions dites arbitraires, de variables réelles. Or, ces deux théories sont nées des travaux de deux géomètres français, de Cauchy pour la première, de FOURIER pour la seconde.

A. L'introduction des nombres complexes et de leur représentation sur un plan est due à ARGAND. C'est Cauchy qui a défini les fonctions analytiques et leurs intégrales, qui a donné les formules fondamentales, qui a créé la théorie des résidus et qui a établi les principes généraux de la représentation analytique des fonctions. Après lui, et suivant sa voie, PUISEUX étudia les fonctions algébriques, BRIOT et BOUQUET étudièrent les fonctions définies par certaines équations différentielles. De ces recherches est née la théorie actuelle des fonctions, qui a été étudiée en France par MÉRAY, Poincaré et par MM. Émile PICARD, APPELL, GOURSAT, PAINLEVÉ, HADAMARD, BOREL.

Nous devons citer en particulier le théorème de M. E. Picard, sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières, les recherches de M. Borel sur les séries divergentes et sur la croissance des fonctions, et celles de M. Hadamard sur la série de Taylor et son prolongement analytique. Les recherches de Laguerre et de Poincaré, sur le genre et les zéros des fonctions entières, ont été l'origine de travaux établissant des relations très précises entre la croissance de ces fonctions et la fréquence de leurs zéros. Les principaux de ces travaux sont dus à MM. Hadamard, Borel, BOUTROUX, DENJOY, VALIRON.

La théorie des fonctions elliptiques *in abstracto* a été créée par LIOUVILLE dans ses leçons au Collège de France, et par Hermite comme application des théorèmes généraux de Cauchy. La théorie des fonctions elliptiques a été exposée dans les traités français de Briot et Bouquet, HALPHEN, TANNERY et MOLK, Appell et LACOUR, celle des fonctions algébriques et de leurs intégrales dans un ouvrage de MM. Appell et Goursat.

La théorie de Puiseux a été étendue par M. Émile Picard aux fonctions algébriques de plusieurs variables et exposée dans un ouvrage par MM. E. Picard et SIMART; la théorie des intégrales Abéliennes a été étendue par lui aux différentielles totales algébriques et à certaines intégrales multiples. Poincaré s'est également occupé des intégrales multiples dans le domaine complexe.

La *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, qui comprend plus de 20 volumes, dont 8 dus à son directeur M. Borel, est universellement citée comme la référence la plus autorisée dans les recherches récentes sur la théorie des fonctions; la collaboration d'éminents savants de divers pays, qui ont écrit pour cette collection des livres en langue française, est un témoignage rendu à la place prépondérante prise par la France dans ces études.

Les *fractions continues algébriques* ont été employées par Lagrange pour la représentation de certaines fonctions. Dans ce domaine, d'importants travaux ont été faits par Laguerre, par M. MONTESSUS DE BALLORE et par un mathématicien d'origine hollandaise, naturalisé français, STIELTJÈS. L'étude systématique des divers types de fractions continues qui peuvent représenter une même fonction a été faite par M. PADÉ.

Fonctions définies par des équations différentielles. — D'importantes recherches ont été consacrées aux fontions définies par les équations différentielles. D'abord Poincaré a donné les principes d'une étude d'une fonction réelle définie par une équation différentielle du premier ordre. Dans le domaine complexe il a construit les fonctions automorphes, il a créé leur théorie générale et il a montré comment ces fonctions se rattachent à l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. POINCARÉ a ainsi fondé une théorie d'une importance capitale qui comprend, comme cas particulier, l'étude de la fonction

Cl. Gerschel.

HENRI POINCARÉ (1854-1912)

modulaire, faite d'abord par Hermite : des cas particuliers ont été étudiés par STOUFF. Ces recherches ont été étendues par M. Emile Picard à certaines fonctions de deux variables. On doit également à M. Émile Picard, l'intégration régulière d'une classe nouvelle d'équations linéaires, à savoir des équations dont les coefficients sont doublement périodiques et les intégrales uniformes. M. Painlevé a ouvert une voie entièrement nouvelle en étudiant les équations différentielles à points critiques fixes; il a découvert de nouvelles transcendantes uniformes constituant les intégrales générales de ses équations; ces recherches ont été poursuivies jusqu'ici uniquement par des géomètres français, MM. GARNIER, Boutroux, CHAZY, GAMBIER.

Calcul fonctionnel. On peut faire rentrer dans le calcul fonctionnel les recherches de M. E. Picard sur la théorie des approximations successives, celles de M. KOENIGS, et les recherches plus récentes de MM. FRÉCHET et LATTÈS.

Équations aux dérivées partielles. — Dans la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles nous rencontrons, en premier lieu, le nom de Lagrange, puis les noms de CHARPIT, de Cauchy, et à l'époque actuelle, de M. DARBOUX (*solutions singulières, équations de second ordre*), de M. Goursat, de M. RIQUIER, de M. GAU et de M. GEVREY. Dans les équations de la physique mathématique, se présentent les noms de POISSON, Fourier, Cauchy, LAMÉ, STURM, Poincaré, de MM. Émile Picard, Darboux, HADAMARD, BOUSSINESQ et BOULIGAND. La théorie des équations aux dérivées partielles a été exposée dans des ouvrages de M. Goursat.

La théorie des groupes et les équations différentielles. — D'importants travaux français ont eu pour objet l'application de la notion de groupe de tranformation aux équations différentielles : d'une part, l'étude des invariants différentiels, des invariants des équations linéaires et d'autres types d'équations, ont fait l'objet des travaux d'HALPHEN, de Laguerre, de Poincaré, de MM. Appell et Painlevé. D'autre part, les théories de Galois ont été étendues aux équations différentielles linéaires par M. Émile Picard et par

M. Vessiot. Des conceptions très profondes de M. Drach ont permis de concevoir, sous un point de vue entièrement nouveau, l'irréductibilité des systèmes d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles, ainsi que l'application de la théorie des groupes à ces systèmes. M. Cartan a publié d'importants mémoires sur la théorie des groupes.

B. *Fonctions de variables réelles*. — Le célèbre développement en série trigonométrique de Fourier, donne le premier exemple de la représentation analytique d'une fonction arbitraire. Ce développement a ouvert à l'analyse une voie entièrement nouvelle, d'une importance capitale en physique mathématique. Dans ces dernières années les propriétés de ces développements ont fait l'objet de travaux très pénétrants de M. Lebesgue.

Après Fourier, on a été conduit à des développements analogues, procédant, suivant d'autres fonctions, par exemple les développements en séries de polynomes de Legendre, de fonctions de Laplace et de Lamé. La convergence de ces séries a été étudiée par M. Darboux dans ses travaux sur les approximations des fonctions de grands nombres. Ces derniers développements, qui se rattachent à la théorie du potentiel, ont été étendus par Hermite, puis par son élève Didon, suivant une voie algébrique, à des fonctions et à des polynomes de plusieurs variables. La nature de ces fonctions a été caractérisée par M. Appell, qui les a rattachées, d'une part, aux fonctions hypergéométriques de plusieurs variables et, d'autre part, aux potentiels dans l'hyperespace. On doit citer également à propos de cette question la thèse de M. Kampé de Fériet.

Au domaine des fonctions réelles, se rattache la théorie des ensembles, dont M. Jordan a contribué à préciser les principes, dans son cours d'analyse. La nouvelle définition de la mesure des ensembles due à M. Borel, et devenue classique, joue un rôle capital dans l'analyse des variables réelles; la définition de l'intégrale, due à M. Lebesgue, est un instrument de découverte et de démonstration des plus précieux, dont les applications s'étendent chaque jour.

C. Il faut mentionner à part l'étude des développements généraux des fonctions en séries, particulièrement en séries de polynomes, dans lesquels l'analyse des variables complexes et celle des variables réelles se pénètrent mutuellement, et qui ont fait l'objet des travaux de MM. Painlevé, Borel, BAIRE, Lebesgue, MONTEL, FATOU.

Calcul des variations. — Le calcul des variations a été découvert par Lagrange; il vient d'être exposé, avec toute la rigueur qui résulte d'un siècle de travaux divers, dans un livre récent de M. Hadamard. On peut rattacher au calcul des variations, une branche nouvelle des mathématiques, le calcul fonctionnel, tel qu'il a été étudié par MM. Hadamard, FRÉCHET, Paul LÉVY.

Calcul des probabilités. — Nous devons citer les noms de PASCAL, de LAPLACE, de JOSEPH BERTRAND et les traités récents de MM. Borel, CARVALLO et BACHELIER.

GÉOMÉTRIE. — 1° *Géométrie analytique et géométrie algébrique.* — La découverte de la géométrie analytique, qui a permis de soumettre au calcul les questions de géométrie, de cinématique et de mécanique, est due à un Français, René DESCARTES; PASCAL renouvela la théorie des sections coniques; PONCELET fut le créateur de la géométrie projective. CHASLES, continuateur de DESARGUES, créa une géométrie projective nouvelle, basée sur la considération du rapport anharmonique, de l'homographie et de l'involution. Les travaux d'Hermite, de Cayley et de SYLVESTER, sur les invariants et les covariants, donnèrent la raison profonde des propriétés projectives des courbes algébriques. L'étude des courbes algébriques, à l'aide de la représentation des coordonnées d'un de leurs points par des fonctions uniformes d'un paramètre, trouva son couronnement dans un célèbre théorème de POINCARÉ, d'après lequel les coordonnées d'un point d'une de ces courbes peuvent toujours s'exprimer par des fonctions automorphes d'un paramètre : cette représentation donna lieu à d'intéressantes recherches de M. HUMBERT. La théorie des surfaces algébriques est entrée dans une voie nouvelle par les travaux de Poincaré et de M. Émile Picard, sur les intégrales multiples et les intégrales de différentielles totales algébriques et par les recherches de M. Humbert. A ces mêmes questions se rapportent les thèses de MM. TRAYNARD et RÉMY.

2° *Géométrie infinitésimale.* — La géométrie infinitésimale relève de la théorie des équations aux dérivées partielles, éclairée par des considérations de géométrie synthétique. Pour en trouver l'origine, il faut remonter aux études de Lagrange, sur le problème des cartes géographiques, et de MONGE, sur les lignes de courbure. Vers le milieu du siècle dernier Liouville, J. Bertrand, O. BONNET, SERRET, BOUR, RIBAUCOURT et M. Darboux ont efficacement contribué aux progrès de cette partie de la Science. La géométrie infinitésimale a pris en France un vif essor sous l'influence des leçons de M. Darboux, qui résumaient et étendaient largement les applications de la haute analyse à la géométrie.

Dans le problème des systèmes triples orthogonaux, le nom de Lamé doit occuper la première place; il faut y joindre les noms de BINET, Liouville, J. Bertrand, BOUQUET et de M. Darboux, qui a résumé, en un important ouvrage, ses recherches sur ce sujet. Les travaux et l'enseignement de M. Darboux ont produit, en France, une brillante école de géométrie infinitésimale, dans laquelle il faut citer MM. KOENIGS, Goursat, GUICHARD, COSSERAT, DRACH, CLAIRIN, ...

3° *Géométrie descriptive.* — MONGE avait créé, avant la Révolution, la géométrie descriptive, afin de substituer les constructions graphiques aux calculs antérieurement usités dans le tracé des fortifications. De ces méthodes fécondes, sont sorties la géométrie perspective et la statique graphique, due à un suisse, Kuhlmann, perfectionnée par les importantes publications de Maurice LÉVY.

4° *Nomographie.* — A ce même ordre d'idées se rattachent les méthodes de calculs graphiques qui ont pour point de départ les travaux de l'ingénieur français LALANNE. Ces méthodes ont été développées systématiquement par un autre ingénieur français, M. D'OCAGNE, qui a donné des applications pratiques d'une grande utilité pour l'ingénieur.

✿ ✿ ✿

CINÉMATIQUE. — Déjà l'Italien GALILÉE donna le principe de la composition de deux mouvements, l'un vertical, l'autre horizontal. Descartes, ROBERVAL, MERSENNE et VARIGNON généralisèrent ce principe. Mais la cinématique, considérée comme le préliminaire indispensable de l'étude de la mécanique théorique ou appliquée, est due à AMPÈRE. Elle fut développée par CHASLES, PONCELET, de SAINT-VENANT; CORIOLIS donna un théorème fondamental sur le mouvement relatif; POINSOT montra que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être obtenu par le roulement d'un cône sur un autre; Chasles, étudiant le mouvement général d'un corps solide, découvrit le déplacement hélicoïdal instantané et représenta le mouvement fini à l'aide de deux surfaces réglées; MONGE et HACHETTE furent les premiers à essayer une classification des divers mécanismes. Tout récemment, la conception des chaînes cinématiques, créée par un Français, M. Kœnigs, donna le véritable point de vue sous lequel les mécanismes doivent être analysés. La cinématique des fluides a été exposée dans un ouvrage important de M. Hadamard, qui contient sur les discontinuités dans les mouvements des fluides des résultats nouveaux généralisant ceux de HUGONIOT.

✿ ✿ ✿

MÉCANIQUE. — 1° *Statique.* — C'est Lagrange qui a montré, le premier, comment le principe du travail virtuel ramène la statique à la géométrie et comment la solution de tous les problèmes d'équilibre s'en déduit par une méthode uniforme. La statique des fluides n'est qu'un cas particulier de la statique générale. Créée par Archimède, elle a été perfectionnée par Galilée, Descartes et Pascal. La théorie des corps flottants a été portée à un haut degré de perfection par le Français DUPIN, et récemment développée par M. GUYOU. Les seules figures d'équilibre relatif d'une masse liquide homogène en rotation uniforme, sous l'action newtonnienne, rigoureusement déterminées jusqu'en 1887, étaient les ellipsoïdes ; dans un mémoire génial, Poincaré démontra qu'il existe une infinité discrète de figures d'équilibres, infiniment voisines des ellipsoïdes. Il indiqua le moyen de les déterminer par l'emploi des fonctions de Lamé ; il étudia la stabilité des diverses figures par la considération toute nouvelle des figures limites et des figures de bifurcation.

Pour les figures hétérogènes, il faut citer CLAIRAUT, puis à l'époque actuelle M. HAMY et M. VÉRONNET.

2° *Dynamique*. — Les principes de Newton créèrent vraiment la mécanique.

L'ouvrage le plus important, après celui de Newton, est le traité de dynamique de d'ALEMBERT. Ce géomètre montra que la mise en équation de tout problème de dynamique, peut se ramener à un problème de statique. Lagrange fonda sur ce principe son admirable mécanique analytique, dans laquelle il ramène toute la mécanique à une formule unique, dont il tire les équations du mouvement, sous une forme que l'on a cru longtemps absolument générale et qui n'est exacte que si les liaisons peuvent s'exprimer en termes finis. Lorsque certaines liaisons s'expriment par des relations différentielles non intégrables, les équations peuvent être mises sous une forme générale donnée par M. Appell, qui paraît présenter de l'intérêt dans l'explication mécanique des phénomènes physiques. Cette forme d'équations, dans le cas de liaisons non linéaires, a été étudiée par M. DELASSUS.

Le principe de la moindre action est dû au Français MAUPERTUIS ; le principe de l'action variable, à l'Anglais Hamilton, qui en a déduit les équations canoniques de la mécanique. Poincaré, dans son mémoire sur le problème des trois corps et dans ses leçons nouvelles de mécanique céleste, a renouvelé les méthodes de la mécanique analytique et a introduit la notion féconde des invariants intégraux, qui se trouve en germe dans un théorème de Liouville, sur lequel est basé le principe essentiel de la mécanique statique, « extension en phase » de W. GIBBS.

Par ses recherches sur le pendule et le gyroscope, FOUCAULT a ouvert une voie nouvelle, dans laquelle ont été faits d'importants travaux.

Les théories de Poincaré sur les solutions périodiques et les solutions asymptotiques, dans le problème des trois corps, ont été appliquées à diverses questions de mécanique par MM. Hadamard et Kœnigs. Le problème du mouvement d'un corps solide suspendu par un point a donné lieu à d'importants travaux de Lagrange, Poinsot, HALPHEN, Darboux et, plus récemment, de M. HUSSON. Les principes d'une théorie mathématique de l'aéroplane ont été posés par M. Painlevé et étudiés dans les thèses de MM. DE BOTHÉZAT et DE GRAMONT DE GUICHE.

3° Les équations de l'hydrodynamique sont d'une application extrêmement difficile. L'un des progrès les plus importants qui ait été réalisé dans ce domaine, est la théorie des tourbillons, dont toutes les formules se trouvent dans un célèbre mémoire de Cauchy, présenté à l'Académie des sciences en 1815 et paru en 1827, avant les recherches de Helmholtz et de Lord Kelvin.

M. Boussinesq, en traitant, par approximation, les équations de l'hydrodynamique, dans certains cas particuliers, a réussi à résoudre, d'une manière satisfaisante, un grand nombre de problèmes de la pratique, (*théorie des eaux courantes, onde solitaire, théorie du déversoir, mouvement d'une sphère dans un fluide visqueux*, etc.). HUGONIOT a traité le premier la propagation des discontinuités d'ordre supérieur.

M. Boussinesq a publié un ouvrage sur les potentiels; il est le chef d'une école de physique mathématique dans laquelle nous citerons MM. MONTEIL, ROY, VILLAT, VERGNE. M. DUHEM a publié d'importants travaux sur la mécanique, la physique mathématique et l'histoire des Sciences. M. BLONDEL a étudié la théorie des marées dans un canal.

4° *Élasticité et résistance des matériaux.* — Par son mémoire de 1821, sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides, NAVIER créa la mécanique moléculaire que Cauchy, POISSON, Lamé, BARRÉ DE SAINT-VENANT, RESAL, Boussinesq contribuèrent à édifier en développant la théorie de l'élasticité, de la flexion et de la torsion. C'est également à Navier qu'est due la théorie de la résistance des matériaux, successivement perfectionnée par CLAPEYRON, BELLANGER, BRESSE, Maurice LÉVY.

Au point de vue mathématique, un des plus grands progrès de l'intégration des équations de l'élasticité est dû à MM. Eugène et François COSSERAT qui, en considérant les solutions comme fonctions du paramètre fondamental, rattachèrent la question à la théorie moderne des fonctions.

Dans le domaine de la physique mathématique et de la mécanique, un ensemble des plus importants est constitué par la publication des divers cours de POINCARÉ à la Sorbonne.

5° *Frottement.* — Il était connu, depuis les travaux de COULOMB, que les lois pratiques du frottement sont d'assez grossières approximations. C'est à un autre Français, M. Painlevé, que revient le mérite d'avoir montré que ces lois peuvent conduire à des impossibilités logiques. M. Painlevé a d'ailleurs donné du frottement une théorie générale par les méthodes de la mécanique analytique.

Nous laissons de côté les travaux relatifs à la *mécanique appliquée.*

Paul APPELL.

BIBLIOGRAPHIE

DESCARTES (1596-1650). — **La Géométrie*, in-4°. Paris, Hermann, 1886.

ARGAND (1755-1803). — **Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1874.